

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



اکاډمی علوم افغانستان

معاونیت علوم طبیعی - تخنیکي

مرکز علوم ریاضی، فزیک و تخنیک

انستیتوت ریاضی و فزیک

دیارتمنت ریاضی

موضوع کنفرانس:

کاربرد های نظریه صف در مسایل مدیریتی

1403/11/16

ترتیب کننده: محقق خورشید انور نیازی

هدف: هدف این کنفرانس، معرفی نظریه صف و مفاهیم اساسی آن، از جمله ساختار صف، معیارهای ارزیابی و مدل‌های نمایی یک سیستم صف است. همچنین، استفاده از مدل‌های نمایی سیستم صف برای حل مسایل مرتبط با خدمات مشتریان در یک بانک، کتابخانه یا سایر حوزه‌های خدماتی به منظور کاهش زمان انتظار مشتریان و طول صف، از اهداف کلیدی این موضوع محسوب می‌شود.

اهمیت و مبرمیت: کاربردهای نظریه صف در مسایل مدیریتی از اهمیت خاصی برخوردار است؛ زیرا نظریه صف به عنوان یکی از ابزارهای کلیدی در علم مدیریت و بهینه‌سازی فرایندها، نقش چشمگیری در افزایش بهره‌وری سازمان‌ها و رضایت مشتریان ایفا می‌کند. مبرمیت این موضوع به ویژه در شرایطی که سازمان‌ها به دنبال مدیریت بهتر صف‌ها، افزایش رضایت مشتریان و کاهش هزینه‌ها هستند، به وضوح احساس می‌شود.

سوال تحقیق: چگونه می‌توان از نظریه صف و مدل‌های مرتبط، برای کاهش زمان انتظار مشتریان در صنایع خدماتی بهره‌برداری کرد؟

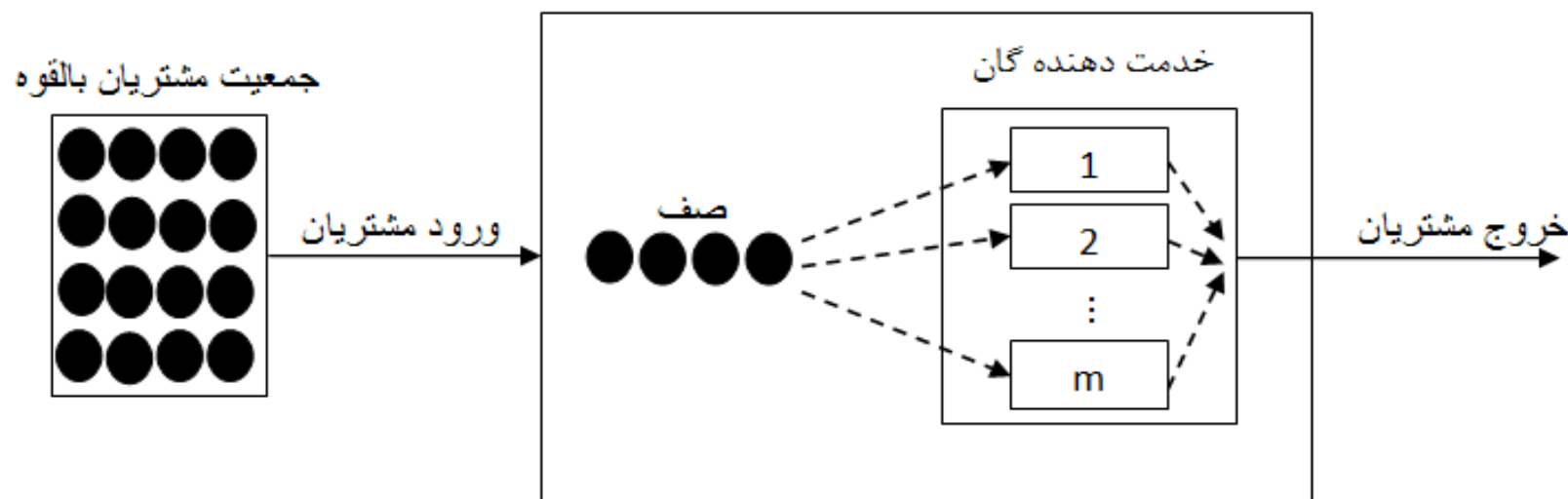
مقدمه

هر چند انتظار در صف (ردیف یا قطار) بسیار ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی اجتناب ناپذیر زنده گی را تشکیل می دهد. هر کس در زنده گی روزمره با انواع مختلف صف که به از بین رفتن وقت و سرمایه می انجامد، روبرو می شود. مثلاً صف در ترافیک شهری، صف در شرکت های مخابراتی، صف در شرکت های تولیدی، صف مریضان در شفاخانه، صف در بانک ها و غیره.



نظریه صف (Queueing Theory): نظریه صف که به مطالعه صف از دیدگاه ریاضی می پردازد، تاثیر عوامل تشکیل دهنده و راه های منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می کند (با استفاده از مدل های صف، می توان طول صف و زمان انتظار آن را پیش بینی نمود). اگر چه هیچ گاه نمی توان صف را کاملاً از بین برد، اما می توان با شناسایی عوامل مؤثر و تحلیل آن ها ضایعات ناشی از انتظار در صف و همچنین هزینه های نگهداری آن را حتی الامکان کاهش داد.

اجزای سیستم صف:



معیار های ارزیابی یک سیستم صف

درصدی از زمان

زمان انتظار

طول صف

برای محاسبه معیار های ارزیابی یک سیستم صف و در نتیجه عملکرد آن، نیاز به دانستن عوامل متعدد (ورودی های سیستم) است که عمده ترین آن ها عبارتند از:

نظام سیستم

FIFO

LIFO

SIRO

جمعیت مشتریان

c

تعداد خدمت دهنده گان

m

الگوی ورود مشتری

λ

ظرفیت سیستم

k

الگوی خدمت دهی

μ

مراحل خدمت

توزیع نمایی

تابع توزیع نمایی یک تابع پیوسته است که از آن بیشتر در پیش بینی مدت زمان لازم برای اتفاق یک حادثه استفاده می‌شود. برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم‌اکنون) تا اتفاق یک زمین‌لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفونی اشتباه و غیره متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند.

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

محاسبهٔ اوسط توزیع نمایی: اوسط این متغیر تصادفی به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

در رابطهٔ فوق λ اوسط تعداد مشتریانی را نشان می‌دهد که وارد سیستم می‌شوند.

رابطه بین معیار های ارزیابی یک سیستم صف

L : اوسط تعداد مشتریان در سیستم

L_q : اوسط تعداد مشتریان در صف

W : اوسط مدت حضور یک مشتری در سیستم

W_q : اوسط مدت زمان انتظار یک مشتری در صف

π_0 : درصد بیکاری هر خدمت دهنده

π_n : احتمال بودن n مشتری در سیستم

استنتاج لیتل (Little's Law):

$$\boxed{L = \lambda W} \quad , \quad \boxed{L_q = \lambda W_q} \quad , \quad \boxed{W = W_q + \frac{1}{\mu}}$$

ضریب بهره وری: یکی از معیار های ارزیابی سیستم درصدی از زمان است که سیستم کار می کند. برای نشان دادن این معیار، از عاملی بنام ضریب بهره وری ρ استفاده می شود، که بر حسب تعریف عبارت است از:

$$\rho = \frac{\text{اوسط کل تقاضا برای دریافت خدمت در واحد زمان}}{\text{کل ظرفیت سیستم برای ارائه خدمت در واحد زمان}}$$

قضیه: در یک سیستم صف با m خدمت دهنده که λ و μ به ترتیب معرف الگوی ورود مشتری و الگوی خدمت دهی است، ضریب بهره وری از رابطه $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ به دست می آید.

نمایش یک سیستم صف

یک سیستم صف را در حالت کلی بطور قراردادی با نماد $A/B/m/K/C/Z$ نشان می دهند. A یا $A(x)$ تابع توزیع زمان بین دو ورود، B یا $B(x)$ تابع توزیع مدت خدمت دهی، m تعداد خدمت دهنده، K ظرفیت سیستم، C جمعیت مشتریان و Z نظام سیستم را نشان می دهد.

در قرارداد فوق، به جای A یا B ، بر حسب این که تابع توزیعی نمایی داشته باشند، از حرف M به عنوان کد استفاده می شود:

اگر ظرفیت صف نامتناهی باشد، چهارمین حرف یعنی K و اگر جمعیت مشتریان بالقوه نامتناهی باشد، پنجمین حرف یعنی C را می توان حذف کرد. همچنین اگر نظم سیستم بر مبنای نوبت (FIFO) باشد، ششمین حرف یعنی Z نیز حذف می شود.

مدل های نمایی در سیستم های صف

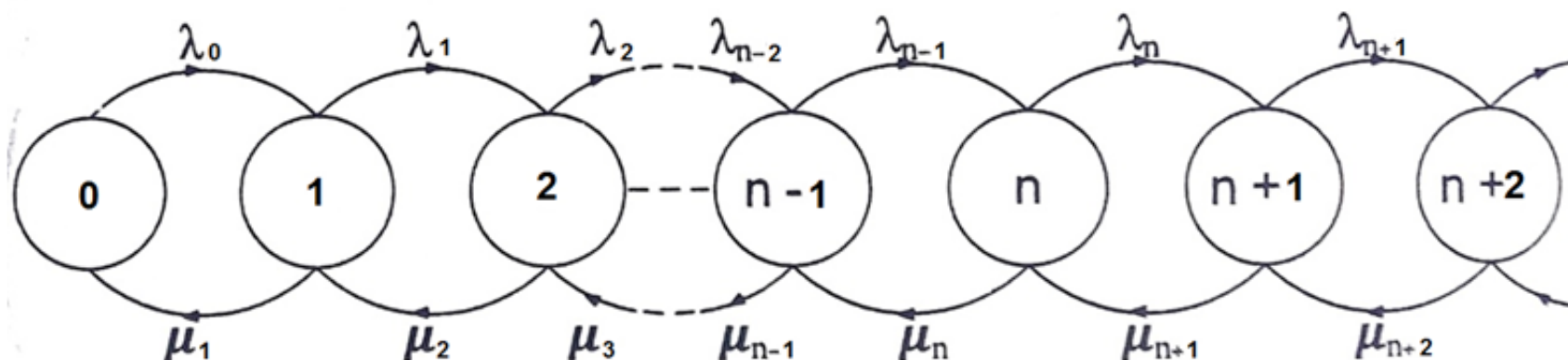
منظور از مدل های نمایی، مدل هایی است که در آن ها دو متغیر تصادفی زیر دارای توزیع نمایی می باشند:

1- زمان بین دو ورود متوالی مشتری ها

2- مدت خدمت

مدل های نمایی از مهمترین نمونه های سیستم صف هستند و به طور کلی، $M/M/...$ نماد مدل های نمایی است.

معادلات تعادلی در سیستم های نمایی: π_n معرف بودن n مشتری در سیستم یا درصدی از زمان است که سیستم دارای n مشتری است. برای محاسبه π_n ، از شکل ذیل استفاده می شود:



با توجه به شکل فوق معادلات تعادلی در حالت صفر، حالت 1 بالآخره برای حالت $n \geq 1$ برابر است با:

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

$$\lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1$$

$$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \pi_n$$

با استفاده از رابطه های فوق نتیجه می شود:

$$\pi_n = C_n \pi_0 \quad , \quad C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad , \quad n \geq 1$$

از طرف دیگر می دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ بوده بناءً:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$$

رابطه بین L و π_n عبارت از $L = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$ بوده و سایر معیار های ارزیابی را می توان از استنتاج لیتل بدست آورد.

مدل $M/M/1$

این مدل متداول ترین مدل صف است که به مدل کلاسیک نیز موسوم است. در این مدل، با استفاده از معادلات تعادلی سیستم های نمایی جدول ذیل را بدست خواهیم آورد:

پارامترها		ضریب بهره وری	معیار های ارزیابی مدل				
$\lambda_n = \lambda$	$\mu_n = \mu$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\pi_0 = 1 - \rho$	$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$W = \frac{L}{\lambda}$	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

در جدول فوق $\rho < 1$ فرض شده است.

مسئله خدمات مشتریان یک کتابخانه: کتابخانه عمومی که فقط یک کتابدار دارد را در نظر می گیریم. مشتریان کتابخانه طبق فرآیند پواسون با اوسط 10 نفر در ساعت وارد می شوند. مدت زمانی که طول می کشد تا کتابدار به تقاضای یک مشتری رسیدگی کند، متغیر تصادفی نمایی با اوسط 5 دقیقه است. این مسئله با مدل $M/M/1$ قابل حل است، بنا بر این؛ معیار های ارزیابی این مدل را قرار جدول ذیل محاسبه می کنیم:

پارامتر ها		ضریب بهره وری	معیار های ارزیابی مدل				
λ	μ	ρ	π_0	L_q	L	W	W_q
10	12	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	4.17	5	30min	25min

مدل $M/M/m$

این سیستم m خدمت دهنده دارد. از نظر ظرفیت صف و جمعیت مشتری هم محدودیتی برای آن فرض نمی شود. در این مدل به تمام مقادیر n ، الگوی ورود مشتری ثابت و برابر با $\lambda_n = \lambda$ است. چنانچه تعداد مشتری داخل سیستم برابر با n باشد، برای الگوی خدمت دهی دو حالت پیش می آید. یعنی:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \quad n < m \\ m\mu & , \quad n \geq m \end{cases}$$

فرمول های این مدل را می توان قرار ذیل حاصل نمود:

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad , \quad L_q = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$w_q = w - \frac{1}{\mu} \quad , \quad w = \frac{L}{\lambda}$$

مسئله خدمات مشتریان یک بانک: فرض می کنیم یکی از نمایندگی های نوبی کابل بانک 7 خدمت دهنده دارد که از جمله 4 خدمت دهنده به منظور اجرای توزیع معاشات خدمات را ارائه می کنند. زمان ارائه خدمت به یک مشتری بطور متوسط 5 دقیقه طول می کشد. مشتری ها بطور متوسط 30 نفر در ساعت طبق فرآیند پواسون وارد بانک می شوند. با فرض این که نظام سیستم بر مبنای FIFO باشد، مدل ارائه خدمات این بانک $M/M/m$ بوده، پس معیار های ارزیابی آن را قرار ذیل محاسبه می کنیم:

حل: به طور متوسط در هر ساعت $\lambda = 30$ نفر وارد بانک می شوند و هر خدمت دهنده ظرفیت ارائه خدمت به 12 نفر در ساعت را دارد (یعنی در 60 دقیقه 12 نفر از یک خدمت دهنده، خدمت دریافت می کنند)، لذا $\mu = 12$ است. چون تعداد خدمت دهنده گان $m = 4$ بوده و بدین ترتیب ضریب بهره وری عبارت است از:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{30}{4 \cdot 12} = \frac{5}{8} = 0.625$$

پارامترها		ضریب بهره وری	معیارهای ارزیابی مدل				
λ	μ	ρ	π_0	L_q	L	W	W_q
30	12	0.625	0.073	0.53	3.03	6.06min	1.06min

از جدول بالا نتیجه می شود که $\rho < 1$ بوده و بنا بر این سیستم پایدار است یعنی؛ صف طولانی نبوده و هر مشتری که وارد سیستم میشود، زمان 1.06 دقیقه طول می کشد تا در صف منتظر بماند و در 6.06 دقیقه خدمت دریافت خواهد کرد.

حال اگر $\lambda = 38$ باشد و زمان ارائه خدمت به یک مشتری 6 دقیقه طول بکشد، بنا بر این $\mu = 10$ خواهد بود پس:

پارامترها		ضریب بهره وری	معیارهای ارزیابی مدل				
λ	μ	ρ	π_0	L_q	L	W	W_q
38	10	0.95	0.005	16.48	20.28	32min	26min

از مقایسه جدول های فوق به نظر می رسد که با ورود بیشتر مشتری ها و همچنان زمان ارایه خدمت، ضریب بهره وری نیز افزایش یافته است که در نتیجه آن درصد بیکاری هر خدمت دهنده خیلی پایین آمده و طول صف به 16.48 رسیده و نیز زمان انتظار مشتری در صف به 26 دقیقه افزایش یافته است. این بدان معنی است که وقتی هر مشتری جهت دریافت خدمت در هر لحظه وارد سیستم میشود باید 26 دقیقه منتظر بماند تا نوبت ارائه خدمت به وی برسد.

از حل مسئله فوق نتیجه می شود که طول صف و زمان انتظار مشتریان وابسته به ρ بوده که خود ρ بستگی به m ، μ و مدت خدمت دهی دارد که در جدول های ذیل به وضاحت نشان داده شده است:

مدت خدمت دهی	μ	ρ	w_q	L_q
کمتر	بیشتر	کمتر	کمتر	کمتر

m	ρ	w_q	L_q
بیشتر	کمتر	کمتر	کمتر

نتیجه گیری

از تحقیق پیرامون (کاربرد های نظریه صف در مسایل مدیریتی)، نتایج ذیل حاصل گردیده است:

- 1- نظریه صف یکی از ابزار های ریاضی و عملیاتی است که در حل مسایل مدیریتی کاربرد زیادی دارد. این نظریه می تواند به سازمان ها کمک کند تا نیروی انسانی، تجهیزات و سایر ظرفیت ها را بهینه کند.
- 2- تحلیل صف در بانک ها، شفاخانه ها، مغازه ها و سایر مسایل مدیریتی می تواند به شناسایی و کاهش زمان انتظار مشتریان کمک کند و از بروز صف های طولانی و ضیاع وقت جلوگیری نماید.

3- مدل های صف می توانند در پیش بینی و کنترل تاخیرات در مسایل مدیریتی مختلف کمک کنند تا سازمان ها تصمیمات بهتری در زمینه سرمایه گذاری و تخصیص منابع بگیرند.

4- یکی از ساده ترین راه های کنترل تعداد مشتریان، تعیین وقت یا اعلام زمان کار است. راه حل دیگر، ارائه تخفیف در روزهای کم مراجعه است تا انبوه مشتریان به طور نورمال بین روزهای مختلف پخش شوند. این نکات در سازمان هایی که با مسایل مربوط به صف و زمان انتظار روبرو هستند، نقش حیاتی دارد و می تواند موجب افزایش بهره وری، کاهش هزینه ها، بهبود رضایت مشتریان و ارتقای کیفیت خدمات و محصولات شود.

پیشنهادهای

پیشنهادهای ذیل می تواند به سازمان ها کمک کند تا بطور موثری از نظریه صف در بهبود فرآیندها و حل مشکلات مدیریتی خود بهره برداری کنند:

1- پیشنهاد می شود که سازمان ها از مدل های صف برای بهینه سازی در بخش های خدماتی و تولیدی، استفاده کنند تا بتوانند مشکلات احتمالی را پیش بینی و از بروز تاخیرات جلوگیری نمایند.

2- پیشنهاد می شود که مدیران و کارشناسان اجرایی، دوره های آموزشی در زمینه نظریه صف و کاربرد های آن در مدیریت بگذرانند تا بتوانند از این طریق بطور موثری تصمیم گیری نموده و خدمات بهتری را برای مشتریان ارائه نمایند.

3- با توجه به پیشرفت های فناوری اطلاعات و سیستم های هوش مصنوعی، پیشنهاد می شود که سازمان ها از سیستم های مبتنی بر هوش مصنوعی برای پیش بینی و بهینه سازی صف ها استفاده کنند.

4- همچنان پیشنهاد می شود که تحقیقات بیشتری در زمینه بهینه سازی صف ها انجام شود تا مدل های جدید و پیشرفته تری برای حل مشکلات پیچیده تری که در سازمان ها وجود دارد، ارائه گردد.

تشکر می کنم از توجه شما